



# PROSIDING

# SEMINAR NASIONAL

## Matematika dan Pendidikan Matematika

Tema:

**Pengembangan Kompetensi Guru Matematika  
dalam Rangka Menyongsong Implementasi  
Kurikulum 2013**

**Rabu, 3 Juli 2013  
Aula Gedung Pascasarjana UNS**

Diselenggarakan oleh:  
Program Studi Magister Pendidikan Matematika  
Program Pascasarjana Universitas Sebelas Maret  
Surakarta

**PROSIDING**  
**SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN**  
**PENDIDIKAN MATEMATIKA**  
**TAHUN 2013**

**TEMA:**

**Pengembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka  
Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013**

**EDITOR:**

**Prof. Dr. Budiyono, M. Sc.**

**Drs. Tri Atmojo Kusmayadi, M. Sc., Ph.D.**

**Dr. Mardiyana, M.Si.**

**Dr. Imam Sujadi, M.Si.**

**Dr. Riyadi, M.Si.**

**Dr. Budi Usodo, M.Pd.**

**Dwi Maryono, S.Si., M.Kom.**

**ISBN: 978-602-8580-05-2**

**Penerbit:**

**PELANGI PRESS**

Kepuhsari Rt 03/11, Mojosongo, Jebres Surakarta

Telp. (0271) 9226606

e-mail: pelangi\_press@ymail.com

Artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 yang diselenggarakan oleh Program Studi Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta di Aula Gedung Pascasarjana UNS pada Tanggal 3 Juli 2013 . Versi Online dapat diakses di:  
<http://s2pmath.pasca.uns.ac.id>.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Tuhan yang Maha Esa, karena atas rahmat-Nya Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 dapat diterbitkan. Prosiding ini merupakan kumpulan dari sebagian besar artikel ilmiah yang dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 yang mengambil tema” **Pengembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013**”. Kegiatan ini diselenggarakan oleh Program Studi Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret pada Tanggal 3 Juli 2013 di aula gedung Pascasarjana UNS.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada editor prosiding dan seluruh panitia seminar yang telah bekerja keras sehingga seminar ini dapat terlaksana dengan sukses. Semoga prosiding ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Surakarta, 3 Juli 2013  
Ketua Panitia,

Dr. Riyadi, M.Si.

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>ii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>iii</b>
<b>MAKALAH UTAMA .....</b>	<b>1</b>
<b>Djemari Mardapi .....</b>	<b>1</b>
Pengembangan Model Penilaian Pembelajaran Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013	
<b>MAKALAH PENDAMPING: PENDIDIKAN MATEMATIKA 1 .....</b>	<b>11</b>
<b>Tohimin Apriyanto .....</b>	<b>11</b>
Kemampuan Berpikir Kritis Ditinjau dari Disiplin Belajar dan Kompetensi Matematika Siswa	
<b>Urip Tisngati .....</b>	<b>25</b>
Implementasi Pendidikan Karakter dalam Proses Pembelajaran Matematika di Kelas I MI Guppi Semanten di Kabupaten Pacitan	
<b>Eka Chulunul Jannah, Urip Tisngati, Nely Indra Meifiani .....</b>	<b>36</b>
Implementasi Strategi Pembelajaran Think-Talk-Write Terhadap Hasil Belajar Matematika Ditinjau Dari Strategi Kognitif (Studi Eksperimen pada Siswa Kelas VII MTs Negeri Pacitan Tahun Pelajaran 2011/2012)	
<b>M. Zainuddin .....</b>	<b>47</b>
Eksperimentasi <i>Direct Instruction</i> dengan <i>Giving Questions And Getting Answers</i> terhadap Kreativitas Siswa Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 2 Balen Kabupaten Bojonegoro Tahun Pelajaran 2012/2013	
<b>Rasiman, Kartinah.....</b>	<b>56</b>
Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Semarang dalam Menyelesaikan Masalah Matematika	
<b>Iim Marfua'h .....</b>	<b>66</b>
Analisis Kesulitan Pemecahan Masalah Volume Bangun Ruang Sisi Lengkung pada Siswa Kelas IX SMP Negeri 1 Grogol Sukoharjo	
<b>MAKALAH PENDAMPING: PENDIDIKAN MATEMATIKA 2 .....</b>	<b>79</b>
<b>Sutrisno, Kartinah, Bagus Ardhi .....</b>	<b>79</b>
Profil Kemampuan Mahasiswa Pendidikan Matematika IKIP PGRI Semarang dalam Memecahkan Masalah <i>Open Ended</i> pada Mata Kuliah Kalkulus 1 berdasarkan Tingkat Kemampuan Mahasiswa	
<b>Ali Mahmudi .....</b>	<b>84</b>
Strategi Kognitif dan Metakognitif dalam Pemecahan Masalah Matematika	
<b>Kuswari Hernawati.....</b>	<b>91</b>
<i>Math Mobile Learning</i> , Paradigma Baru Pembelajaran Matematika Berbasis ICT	

<b>Erina Siskawati, Zaenuri Mastur, Iwan Junaedi</b> .....	103
Analisis Kesalahan Peserta didik dalam Menyelesaikan Soal Matematika <i>Problem Solving</i> berdasar <i>Newman's Error Analysis</i> (NEA)	
<b>Nurmalitasari, Imam Sujadi, Tri Atmojo Kusmayadi</b> .....	112
Analisis Proses Pelaksanaan Pembelajaran Matematika di Kelas VIII Akselerasi SMP Negeri 1 Boyolali	
<b>Eka Novarina, Imam Sujadi, Tri Atmojo Kusmayadi</b> .....	119
Analisis Jenis–Jenis Pertanyaan Berdasarkan Maksud yang Diajukan Guru dalam Kegiatan Pembelajaran Matematika Kelas X di SMA Negeri 1 Purworejo	
<b>Budi Mulyono</b> .....	130
SQHG ( <i>Student-Question-Have Game</i> ) sebagai Tipe Model Pembelajaran Kooperatif untuk Meningkatkan Keaktifan Mahasiswa dalam Pembelajaran	
<b>Budi Usodo</b> .....	139
Penerapan Pembelajaran Matematika yang Berbasis pada Pengembangan Intuisi untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa Kelas X Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Sragen Tahun Pelajaran 2012/2013	
<b>MAKALAH PENDAMPING : PENDIDIKAN MATEMATIKA 3</b> .....	147
<b>Dina Prasetyowati</b> .....	147
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Berbasis Humanistik dan Konstruktivisme dengan Pendekatan SAVI ( <i>Somatic Auditory Visual Intellectual</i> ) Berbantuan CD Interaktif Materi Segi Empat Kelas VII	
<b>Dyana Wijayanti</b> .....	157
<i>One Stay-The Rest Stray</i> :Bukankah Membaca Buku Kalkulus Seharusnya Tidak Serumit Mengisi Tekateki Silang	
<b>Edi Irawan</b> .....	165
Analisis Motivasi Berprestasi, Kemandirian Belajar, dan Efikasi Diri Mawapres pada Prodi Pendidikan Matematika STKIP PGRI Pacitan Tahun 2013	
<b>Hongki Julie, St. Suwarsono, Dwi Juniati</b> .....	177
Karakteristik Interaktivitas dalam Proses Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Matematika Realistik di Kelas 5 SD	
<b>Maya Nurfitriyanti</b> .....	188
Kreativitas Mahasiswa Dan Kedisiplinan Belajar serta Pengaruhnya Terhadap Prestasi Belajar Kalkulus	
<b>Nur Hayati</b> .....	195
Pengaruh Adversity Quotient (AQ) dan Motivasi Berprestasi terhadap Prestasi Belajar Matematika	
<b>Nurul Farida, Budi Usodo, Sri Subanti</b> .....	202
Eksperimentasi Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Student Teams Achivement Division (STAD) menggunakan metode pemecahan masalah ditinjau dari sikap kreatif peserta didik SMP Negeri Kelas VIII Se-Kabupaten Lampung Tengah Tahun Pelajaran 2013/2014	

<b>MAKALAH PENDAMPING : MATEMATIKA 1</b> .....	211
<b>Alvida Mustika Rukmi, Fitra Alfiananto, M. Isa Irawan</b> .....	211
Penyajian Modul Ajar dengan Aplikasi Sistem Informasi Berbasis Web	
<b>Karyati, Dhoriva UW</b> .....	223
Semigrup Bentuk Bilinear Terurut Parsial dalam Batasan Subhimpunan Fuzzy	
<b>M. Andy Rudhito</b> .....	231
Sistem Persamaan Linear Iteratif Max-Min Interval	
<b>Siswanto, Ari Suparwanto, M. Andy Rudhito</b> .....	240
Penentuan Vektor Eigen Suatu Matriks Atas Aljabar Max-Plus Interval	
<b>Rica Amelia, Darmaji</b> .....	248
Dimensi Partisi Bintang dari Graf Kincir Yang Diperumum	
<b>Libertus Di Umart Alvares, M. Andy Rudhito</b> .....	264
Tinjauan Matematis Sifat Terbobot Sistem Voting Setuju-Tidak Setuju dalam DPR RI	
<b>Rosita Kusumawati, Eminugroho Ratnasari</b> .....	273
Pembelajaran Pemrograman Linear dengan Geogebra	
<b>Rosita Kusumawati, Emi Nugroho Ratnasari</b> .....	282
Model Semi Markov Multi Status untuk Premi Tambahan Asuransi Perawatan Jangka Panjang	
<b>Sri Subanti, Arif Rahman Hakim, Inaki Maulida Hakim</b> .....	295
Dampak Program Bantuan Langsung Tunai (BLT) Tahun 2008/2009 pada Konsumsi Pendidikan Masyarakat Perdesaan dan Perkotaan di Provinsi Jawa Tengah	
<b>MAKALAH PENDAMPING : MATEMATIKA 2</b> .....	303
<b>Bangkit Joko Widodo, Tri Atmojo Kusmayadi</b> .....	303
Dimensi Metrik Pada Graf Sun	
<b>Syahrudin, Mohammad Isa Irawan</b> .....	310
Perencanaan Pola Tanam Tanaman Pangan Menggunakan Jaringan Syaraf Tiruan Backpropagation	
<b>Triyanto, Purhadi, Bambang Widjanarko Otok, Santi Wulan Purnami</b> .....	324
Estimasi Parameter Pada Regresi Poisson Trivariate	
<b>Yusup Wibisono, M. Andy Rudhito</b> .....	334
Tinjauan Matematis Kriteria Keadilan Pembagian dengan Metode <i>Adjusted Winner</i>	
<b>Rahmawati Oktiana, Dewi Retno Sari Saputro, Sutrima</b> .....	341
Model Vector Autoregressive untuk Prediksi Curah Hujan di Kabupaten Purworejo	

## SISTEM PERSAMAAN LINEAR ITERATIF MAX-MIN INTERVAL

M. ANDY RUDHITO

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma  
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta, email : [arudhito@yahoo.co.id](mailto:arudhito@yahoo.co.id)

### Abstrak

Makalah ini membahas penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min interval yang dapat digunakan sebagai dasar pemodelan masalah lintasan kapasitas interval maksimum. Dengan operasi perpangkatan pada suatu matriks dapat ditentukan kapasitas maksimum untuk semua lintasan pada graf presedennya. Dapat ditunjukkan bahwa setiap sistem persamaan linear iteratif max-min interval, selalu mempunyai penyelesaian interval. Batas bawah dan batas atas penyelesaian interval tersebut berturut-turut adalah penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas bawah dan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas atas dari matriks intervalnya.

**Kata-kata kunci :** *aljabar max-min, interval, sistem persamaan linear, iteratif.*

### PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real  $\mathbf{R}$  dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum (Gondran dan Minoux, 2008).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam Baccelli, dkk. (2001), dan Gondran and Minoux, (2008). Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, memerlukan konsep aljabar max-min interval (Rudhito, 2013a), matriks atas aljabar max-min interval (Rudhito, 2013b) dan sistem persamaan linear iteratif max-min-interval. Untuk itu dalam artikel ini akan dibahas sistem persamaan linear iteratif max-min-interval.

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Terlebih dahulu diperhatikan kembali hasil-hasil dalam matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear iteratif max-min dalam Gondran and Minoux, (2008). Kemudian memperhatikan dan membandingkan pembahasan matriks atas aljabar max-plus, sistem persamaan linear max-plus dalam Baccelli, dkk. (2001), dan matriks atas aljabar max-plus interval serta sistem persamaan linear max-plus interval dalam Rudhito, (2011). Selanjutnya sebagai inti penelitian ini, akan dibahas bentuk dan penyelesaian sistem persamaan linear max-min interval beserta interpertasinya dalam teori graf yang akan terkait dengan penerapannya.

## PEMBAHASAN

Pembahasan diawali dengan konsep dasar aljabar max-min, interpertasinya dalam teori graf, eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min. Pembahasan didasarkan hasil-hasil pada Baccelli et.al (1992), Gondran and Minoux, (2008), Rudhito (20013a) dan Rudhito (2013b).

Diberikan  $\mathbf{R}_\varepsilon^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$  dengan  $\mathbf{R}^+$  adalah himpunan semua bilangan real nonnegatif dan  $\varepsilon := +\infty$ . Pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+, a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := \min(a, b).$$

Dapat ditunjukkan bahwa  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$  merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral  $0 = 0$  dan elemen satuan  $\varepsilon = +\infty$ . Kemudian  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$  disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), *operasi  $\otimes$  mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi  $\oplus$* . Karena  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus)$  merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi " $\preceq_m$ " yang didefinisikan pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  dengan  $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$  merupakan *urutan parsial* pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Karena  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  merupakan semiring idempoten, maka operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  konsisten terhadap urutan  $\preceq_m$ , yaitu  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$ , jika  $a \preceq_m b$ , maka  $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$ , dan  $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$ . Aljabar max-min  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  tidak memuat pembagi nol yaitu  $\forall x, y \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$  berlaku: jika  $x \otimes y = \min(x, y) = 0$ , maka  $x = 0$  atau  $y = 0$ .

Operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$ . Untuk  $\alpha \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$ , dan  $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  didefinisikan  $\alpha \otimes A$ , dengan  $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$  dan  $A \oplus B$ , dengan  $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ . Untuk  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times p}$ ,  $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+p \times n}$ , dengan  $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$ . Matriks  $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  dikatakan sama jika  $A_{ij} = B_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Didefinisikan matriks matriks  $O \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ , di mana  $(O)_{ij} := 0$ ,



untuk setiap  $i$  dan  $j$ , dan matriks  $E \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ , di mana  $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ . Dapat ditunjukkan bahwa  $(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}, \oplus, \otimes)$  merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks  $O$  dan elemen satuan matriks  $E$ . Sedangkan  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  merupakan semimodul atas  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Pangkat  $k$  dari matriks  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan:  $A^{\otimes 0} = E_n$  dan  $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$  untuk  $k = 1, 2, \dots$ . Relasi " $\preceq_m$ " yang didefinisikan pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  dengan  $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B$  merupakan urutan parsial pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ . Perhatikan bahwa  $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_m B_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Dalam semiring idempoten  $(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}, \oplus, \otimes)$ , operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  konsistent terhadap urutan  $\preceq_m$ , yaitu  $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ , jika  $A \preceq_m B$ , maka  $A \oplus C \preceq_m B \oplus C$ , dan  $A \otimes C \preceq_m B \otimes C$ .

Suatu *graf berarah*  $\mathcal{G}$  didefinisikan sebagai suatu pasangan  $\mathcal{G} = (V, A)$  dengan  $V$  adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan  $A$  adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota  $A$  disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah  $\mathcal{G}$  adalah suatu barisan berhingga busur  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$  dengan  $(i_k, i_{k+1}) \in A$  untuk suatu  $l \in \mathbf{N}$  (= himpunan semua bilangan asli), dan  $k = 1, 2, \dots, l-1$ . Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. Diberikan graf berarah  $\mathcal{G} = (V, A)$  dengan  $V = \{1, 2, \dots, p\}$ . Graf berarah  $\mathcal{G}$  dikatakan *berbobot* jika setiap busur  $(j, i) \in A$  dikawankan dengan suatu bilangan real  $A_{ij}$ . Bilangan real  $A_{ij}$  disebut *bobot* busur  $(j, i)$ , dilambangkan dengan  $w(j, i)$ . *Graf preseden* dari matriks  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  adalah graf berarah berbobot  $\mathcal{G}(A) = (V, A)$  dengan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq 0\}$ .

Dalam masalah lintasan kapasitas maksimum,  $A_{ij}$  adalah bilangan real nonnegatif dan merupakan *kapasitas* busur  $(j, i)$ , yaitu aliran maksimum yang dapat melalui busur  $(j, i)$ . Diberikan  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ . Jika  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , maka unsur ke- $st$  dari matriks  $A^{\otimes k}$  adalah

$$(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (\min(A_{s, i_{k-1}}, \dots, A_{i_2, i_1}, A_{i_1, t}))$$

$$= \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (\min(A_{i_1, t}, A_{i_2, i_1}, \dots, A_{s, i_{k-1}})), \text{ untuk setiap } s, t. \text{ Karena } \min(A_{i_1, t}, A_{i_2, i_1}, \dots, A_{s, i_{k-1}})$$

adalah kapasitas lintasan dengan panjang  $k$  dengan  $t$  sebagai titik awal dan  $s$  sebagai titik akhirnya dalam  $\mathcal{G}(A)$ , maka  $(A^{\otimes k})_{st}$  adalah kapasitas maksimum semua lintasan dalam  $\mathcal{G}(A)$  dengan panjang  $k$ , dengan  $t$  sebagai titik awal dan  $s$  sebagai titik akhirnya. Jika tidak ada lintasan dengan panjang  $k$  dari  $t$  ke  $s$ , maka kapasitas bobot maksimum didefinisikan sama dengan 0.

**3. Teorema 1.** Diberikan  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ .  $\forall p \geq n$ ,  $A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n}$ .

**Bukti:** Karena banyak titik dalam  $\mathcal{G}(A)$  adalah  $n$  maka semua lintasan dengan panjang  $p \geq n$  tersusun setidaknya oleh sebuah sirkuit, sehingga kapasitas maksimum sirkuit tersebut lebih kecil atau sama dengan kapasitas maksimum lintasan yang panjangnya kurang dari  $n$ . Akibatnya  $A^{\otimes p} \preceq_m A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}$ ,  $\forall p \geq n$ . Karena untuk setiap  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  berlaku  $A \preceq_m E \oplus A$ , maka  $A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}$ ,  $\forall p \geq n$ . ■

Berdasarkan Teorema 1 di atas didefinisikan operasi bintang (\*) berikut.

**Definisi 1.** Diberikan  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ . Didefinisikan  $A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \dots$ .

Mengingat Teorema 1 diperoleh bahwa  $A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n}$ . Berdasarkan penjelasan tentang kapasitas dan pangkat matriks di atas dapat disimpulkan bahwa unsur  $(A^*)_{ij}$  merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan ujung titik  $j$  dan pangkal titik  $i$ . Didefinisikan pula  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n} := \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots, n \}$ . Perhatikan bahwa  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n}$  dapat dipandang sebagai  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times 1}$ . Unsur-unsur dalam  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n}$  disebut *vektor* atas  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ .

**Teorema 2.** Diberikan  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  dan  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n}$ . Vektor  $\mathbf{x}^* = A^* \otimes \mathbf{b}$  merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ .

**Bukti:**

Perhatikan bahwa berlaku  $A \otimes (A^* \otimes \mathbf{b}) \oplus \mathbf{b} = (E \oplus A \otimes A^*) \otimes \mathbf{b} = A^* \otimes \mathbf{b}$ . Jadi  $\mathbf{x}^* = A^* \otimes \mathbf{b}$  merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ . ■

**Contoh 1.** Diberikan  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Dapat diperoleh  $A^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & 5 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ , sehingga  $\mathbf{x}^* = A^* \otimes \mathbf{b} =$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ . Perhitungan

dapat diperoleh dengan Program *MATLAB* dengan list terlampir di bagian akhir makalah ini.

*Interval* dalam  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  berbentuk  $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+ \mid \underline{\mathbf{x}} \preceq_m \mathbf{x} \preceq_m \overline{\mathbf{x}} \}$ . Didefinisikan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{ \mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \mid \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^+, \varepsilon \prec_m \underline{\mathbf{x}} \preceq_m \overline{\mathbf{x}} \} \cup \{ [\varepsilon, \varepsilon] \}$ . Pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$  didefinisikan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$ :  $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \oplus \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \oplus \overline{\mathbf{y}}]$  dan  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \otimes \overline{\mathbf{y}}]$ , untuk setiap  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ . Dapat ditunjukkan bahwa

$(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  disebut *aljabar max-min interval* dan cukup dituliskan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}$ .

Selanjutnya operasi  $\overline{\oplus}$  dan  $\overline{\otimes}$  pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}$  di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$ . Didefinisikan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ . Matriks anggota  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$  disebut *matriks interval max-min*. Matriks  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$  dikatakan *sama* jika  $A_{ij} = B_{ij}$ . Diketahui  $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}$ ,  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$ . Didefinisikan operasi perkalian skalar  $\overline{\otimes}$  dengan  $\alpha$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya  $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$ , dan operasi  $\overline{\oplus}$  dengan  $A$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya  $(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ . Diketahui  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{p \times n}$ . Didefinisikan operasi  $\overline{\otimes}$  dengan  $A \overline{\otimes} B$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya:  $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

Didefinisikan matriks  $E \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$ , dengan  $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ . Didefinisikan pula matriks

$O \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$ , dengan:  $(O)_{ij} := 0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ .

Perhatikan bahwa  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$  tertutup terhadap operasi  $\overline{\oplus}$ , hal ini akibat dari sifat ketertutupan operasi  $\overline{\oplus}$  pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}$ . Selanjutnya dapat ditunjukkan  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}, \overline{\oplus})$  merupakan semi-grup idempotent komutatif, sehingga relasi “ $\preceq_{\text{Im}}$ ” yang didefinisikan pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$  dengan  $A \preceq_{\text{Im}} B \Leftrightarrow A \overline{\oplus} B = B$  merupakan urutan parsial. Perhatikan bahwa  $A \overline{\oplus} B = B \Leftrightarrow A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\text{Im}} B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_m B_{ij}$  dan  $\overline{A}_{ij} \preceq_m \overline{B}_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Lebih lanjut  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$  merupakan semimodul atas  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}$ , sedangkan  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks  $O$  dan elemen satuan adalah matriks  $E$ . Perhatikan bahwa  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  bukan semiring komutatif, hal ini sebagai akibat dari  $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n \times n}$  yang bukan merupakan semiring komutatif.

Mengingat  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}, \overline{\oplus})$  merupakan semi-grup idempoten, maka operasi  $\overline{\oplus}$  konsisten terhadap urutan  $\preceq_{\text{Im}}$  dalam  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$ , yaitu jika  $A \preceq_{\text{Im}} B$ , maka  $A \overline{\oplus} C \preceq_{\text{Im}} B \overline{\oplus} C$  untuk setiap  $A, B, C \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}$ . Mengingat  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  merupakan semiring idempoten, maka operasi  $\overline{\otimes}$  konsisten terhadap urutan  $\preceq_{\text{Im}}$  dalam  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$ , yaitu jika  $A \preceq_{\text{Im}} B$ , maka  $A \overline{\otimes} C \preceq_{\text{Im}} B \overline{\otimes} C$  untuk setiap  $A, B, C \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$ . Untuk  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times p}$ , dan  $C \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{p \times n}$ , berdasarkan sifat distributif, berlaku: jika  $A \preceq_{\text{Im}} B$  maka  $A \overline{\oplus} B = B \Leftrightarrow (A \overline{\oplus} B) \overline{\otimes} C = B \overline{\otimes} C \Leftrightarrow (A \overline{\otimes} C) \overline{\oplus} (B \overline{\otimes} C) =$

$B \otimes C \Leftrightarrow A \otimes C \preceq_{\text{lm}} B \otimes C$ . Pangkat  $k$  dari matriks  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$ , dalam aljabar max-min interval didefinisikan dengan:  $A^{\otimes 0} = E_n$  dan  $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$  untuk  $k = 1, 2, \dots$ .

Untuk setiap matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ , didefinisikan matriks  $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  dan  $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ , berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks interval  $A$ . Diberikan matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ , dengan  $\underline{A}$  dan  $\overline{A}$  berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks* dari  $A$ , yaitu  $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}\}$  dan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}\}$ . Interval matriks  $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$  dikatakan *samajika*  $\underline{A} = \underline{B}$  dan  $\overline{A} = \overline{B}$ . Diketahui  $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ ,  $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ . Didefinisikan operasi  $\alpha \otimes [\underline{A}, \overline{A}] := [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \overline{A}]$  dan  $[\underline{A}, \overline{A}] \oplus [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ . Diketahui  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times p})_b$ ,  $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+p \times n})_b$ . Didefinisikan  $[\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ .

Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  selalu dapat ditentukan dengan tunggal *interval matriks*  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ , dan sebaliknya. (Rudhito, 2013b). Jadi matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  dapat dipandang sebagai interval matriks  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ . Matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  bersesuaian dengan interval matriks  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ , dan dituliskan " $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ ". Dapat disimpulkan  $\alpha \otimes A \approx [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \overline{A}]$  dan  $A \oplus B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ . Untuk  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$  berlaku  $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ . Untuk matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times p}$  dan  $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p \times n}$  juga berlaku  $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ .

Selanjutnya akan dibahas sistem persamaan linear iteratif max-min interval, yang mempunyai bentuk umum  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ , di mana  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$  dan  $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^n$ . Sistem persamaan linear iteratif max-min interval tersebut selanjutnya cukup disebut sistem interval  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ .

**Definisi 2.** Diberikan  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$  dan  $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^n$ . Suatu vektor interval  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^n$  disebut *penyelesaian interval sistem interval*  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$  jika  $\mathbf{x}^*$  memenuhi sistem interval tersebut.

Berikut diberikan Teorema mengenai eksistensi penyelesaian interval sistem interval  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ .

**Teorema 3** Diberikan  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon$  dan  $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^n_\varepsilon$ . Vektor interval  $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}}, \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}]$ , merupakan suatu penyelesaian interval sistem interval  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ .

**Bukti:** Untuk setiap  $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ , menurut Teorema 2,  $\mathbf{x}^* = A^* \otimes \mathbf{b}$  merupakan suatu penyelesaian sistem  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$  untuk setiap  $\mathbf{b} \in [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ . Mengingat operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\preceq_m$ ", maka  $\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}} \preceq_m A^* \otimes \mathbf{b} \preceq_m \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}$  untuk setiap  $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$  dan untuk setiap  $\mathbf{b} \in [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ . Ambil  $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}}, \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}] = [\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*]$ . Menurut Teorema 2,  $\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}}$  dan  $\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}$  berturut-turut merupakan penyelesaian sistem  $\underline{\mathbf{x}} = \underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}} \oplus \underline{\mathbf{b}}$  dan  $\overline{\mathbf{x}} = \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}} \oplus \overline{\mathbf{b}}$ . Hal ini berarti bahwa  $\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}}^* \oplus \underline{\mathbf{b}}$  dan  $\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}}^* \oplus \overline{\mathbf{b}}$ , yang berarti juga bahwa  $[\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] = [\underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}}^* \oplus \underline{\mathbf{b}}, \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}}^* \oplus \overline{\mathbf{b}}]$  atau  $[\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] = [\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] \oplus [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ . Hal ini berarti  $\mathbf{x}^* = A \otimes \mathbf{x}^* \oplus \mathbf{b}$ . Jadi terbukti bahwa vektor interval  $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}}, \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}]$  merupakan penyelesaian interval untuk sistem  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ .

■

**Contoh 2.** Diberikan sistem  $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ , dengan  $A = \begin{bmatrix} [1,2] & [3,5] & [5,6] \\ [4,4] & [2,3] & [0,0] \\ [0,0] & [\varepsilon, \varepsilon] & [2,4] \end{bmatrix}$ , dan  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} [1,2] \\ [0,0] \\ [2,4] \end{bmatrix}$ ,

$$\text{maka } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Dapat diperoleh } \underline{A}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & 5 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \overline{A}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 6 & 6 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ sehingga } \mathbf{x}^* \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Jadi penyelesaian}$$

interval sistem tersebut adalah vektor interval  $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} [2,4] \\ [2,4] \\ [2,4] \end{bmatrix}$ . Perhitungan dapat diperoleh dengan

Program *MATLAB* dengan list terlampir, dengan menghitung untuk masing-masing matriks batas bawah dan atasnya.

## SIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas diperoleh eksistensi penyelesaian interval sistem persamaan linear iteratif max-min interval. Setiap sistem persamaan linear iteratif max-min interval, selalu mempunyai penyelesaian interval. Batas bawah dan batas atas penyelesaian interval tersebut berturut-turut adalah penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas bawah dan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas atas dari matriks intervalnya.

Selanjutnya masih perlu diteliti mengenai ketunggalan penyelesaian interval sistem persamaan linear iteratif max-min interval di atas. Penelitian ini masih bersifat teoritis matematis, selanjutnya dapat dilakukan penelitian terkait penerapan pada masalah-masalah nyata sehari, khususnya yang terkait dengan kapasitas interval maksimum lintasan dalam suatu jaringan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.
- Gondran, M and Minoux, M. 2008. *Graph, Dioids and Semirings*. New York: Springer.
- Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- Rudhito, Andy. 2013a. Aljabar Max-Min Interval. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA*, tanggal 18 Mei 2013, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
- Rudhito, Andy. 2013b. Matriks atas Aljabar Max-Min Interval. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains dan Matematika*, tanggal 15 Juni 2013, FSM Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.

## Lampiran

List Program *MATLAB* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear iteratif max-min:

```
% Program Matlab Menyelesaikan Sistem Pers Linear Iterative  $x=Ax+b$ 
% Input: A = matriks atas aljabar max-min  $A_{n \times n}$ , b = Vektor  $n \times 1$ 
% Output: Matriks  $x=A*b$ 

% Memasukkan matriks A dan vektor b
A1 = input(' Masukan matriks  $A_{n \times n}$  = ');
B1 = input(' Masukan matriks  $b_{n \times 1}$  = ');
[m, n]= size(A1);
[k, r]= size(B1);

% Menghitung A pangkat dan A+
G1=A1;
A1_plus = A1;
for s=1:n-1
    s+1;
    for i = 1: n
        for j = 1: n
            F1(i, j) = -Inf;
            for p = 1: n
                F1(i, j) = max( F1(i, j) , min(A1(i, p), G1(p, j)));
            end;
        end;
    end;
    G1 = F1;
    A1_plus = max(A1_plus, F1);
end;
disp(' Matriks A_plus '), disp(A1_plus);
```

```

% Menghitung matriks E dan A*
    for i = 1 : n
        for j = 1 : n
            if i == j
E(i,j) = Inf;
            end;
        end;
    end;
    A1_star= max(E, A1_plus)

% Menampilkan hasil A pangkat
disp('  Matriks A_star '), disp(A1_star);

% Menghitung A_star kali B
for i = 1:m
for j = 1: r
    A1_starB1(i, j) = -Inf;
for p = 1: n
    A1_starB1(i, j) = max(A1_starB1(i, j) , min(A1_star(i, p), B1(p, j)));
end;
end;
end;

% Menampilkan hasil kali
disp('  Penyelesaian minimal x'),disp(A1_starB1)

```